Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Enero - Marzo, 2008

# MA-1112 —Practica: semana 8 —

Ejercicios sugeridos para la semana $8$. Cubre el siguiente material: Integración por partes, algunas integrales trigonomètricas y sustitución.

1. Demuestre la identidad

$$\sec(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} + \frac{\cos(x)}{1+\operatorname{sen}(x)}$$

y después utilílicela para deducir la fórmula

$$\int \sec(x)dx = \ln|\sec(x) + \tan(x)| + C.$$

**Solución:**

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} + \frac{\cos(x)}{1+\operatorname{sen}(x)} = \frac{\cos(x)\cos(x)+\operatorname{sen}(x)(1+\operatorname{sen}(x))}{(1+\operatorname{sen}(x))\cos(x)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(x)+(\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x))}{(1+\operatorname{sen}(x))\cos(x)} = \frac{(1+\operatorname{sen}(x))}{(1+\operatorname{sen}(x))\cos(x)} = \frac{1}{\cos(x)} = \sec(x).$$

Así,

$$\int \sec(x)dx = \int \frac{\operatorname{sen}(x)dx}{\cos(x)} + \int \frac{\cos(x)dx}{1+\operatorname{sen}(x)}$$

realizando los cambios de variables $u = \cos(x)$, $du = -\operatorname{sen}(x)dx$ y $v = 1+\operatorname{sen}(x)$, $dv = \cos(x)dx$ en las integrales anteriores

$$\begin{aligned}
\int \sec(x)dx &= \int \frac{\operatorname{sen}(x)dx}{\cos(x)} + \int \frac{\cos(x)dx}{1+\operatorname{sen}(x)} \\
&= \int \frac{-du}{u} + \int \frac{dv}{v} \\
&= -\ln|u| + \ln|v| + C \\
&= -\ln|\cos(x)| + \ln|1+\operatorname{sen}(x)| + C \\
&= \ln|\sec(x) + \tan(x)| + C
\end{aligned}$$

2. Evalúe $\int_0^{2\pi} \frac{x|\operatorname{sen}(x)|}{1+\cos^2(x)}dx$ (sugerencia: haga la sustitución $u = x-\pi$ y después utilice propiedades de simetría).

**Solución:** Realizando el cambio de variable $u = x - \pi$, $du = dx$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \tfrac{x|\operatorname{sen}(x)|}{1+\cos^2(x)}dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{(u+\pi)|\operatorname{sen}(u+\pi)|}{1+\cos^2(u+\pi)}du \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{(u+\pi)|\operatorname{sen}(u)|}{1+\cos^2(u)}du \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{u|\operatorname{sen}(u)|}{1+\cos^2(u)}du + \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{\pi|\operatorname{sen}(u)|}{1+\cos^2(u)}du.
\end{aligned}$$

La función $\frac{u|\operatorname{sen}(u)|}{1+\cos^2(u)}$ es una función impar, por lo tanto, $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{u|\operatorname{sen}(u)|}{1+\cos^2(u)}du = 0$. Adicionalmente, la función $\frac{|\operatorname{sen}(u)|}{1+\cos^2(u)}$ es una función par. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \tfrac{x|\operatorname{sen}(x)|}{1+\cos^2(x)}dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{\pi|\operatorname{sen}(u)|}{1+\cos^2(u)}du \\
&= \pi \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{|\operatorname{sen}(u)|}{1+\cos^2(u)}du \\
&= 2\pi \int_0^{\pi} \tfrac{\operatorname{sen}(u)}{1+\cos^2(u)}du.
\end{aligned}$$

Realizando el cambio de variable $u = \cos(x)$, $du = -\operatorname{sen}(x)dx$; así,

$$\begin{aligned}
2\pi \int_0^{\pi} \tfrac{x|\operatorname{sen}(x)|}{1+\cos^2(x)}dx &= 2\pi \int_0^{\pi} \tfrac{\operatorname{sen}(u)}{1+\cos^2(u)}du \\
&= -2\pi \int_1^{-1} \tfrac{du}{1+u^2} \\
&= 2\pi \int_{-1}^{1} \tfrac{du}{1+u^2} = 2\left(\arctan(u)\right)_{-1}^{1} \\
&= 2\pi\left(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{4}\right) = \pi^2.
\end{aligned}$$

3. Halle las siguientes integrales

   *a)* $\int \ln(x)dx$.
   **Solución:** Utilizando integracion por partes y considerando como $f(x) = \ln(x)$ y $g'(x) = dx$, tenemos que $f'(x) = dx/x$ y $g(x) = x$; asi,

   $$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - \int \frac{xdx}{x} = x\ln(x) - x + C.$$

   *b)* $\int \ln^2(x)dx$.
   **Solución:** Utilizando integracion por partes y considerando como $f(x) = \ln^2(x)$ y $g'(x) = dx$, tenemos que $f'(x) = 2\ln(x)/x$ y $g(x) = x$; asi,

   $$\int \ln^2(x)dx = x\ln^2(x) - 2\int \frac{x\ln(x)dx}{x} = x\ln^2(x) - 2(x\ln(x) - x) + C.$$

   *c)* $\int \frac{\tan(x)dx}{\sqrt{\sec^2(x)-4}}$.
   **Solución:**

$$\begin{aligned}\int \frac{\tan(x)dx}{\sqrt{\sec^2(x)-4}} &= \int \frac{\operatorname{sen}(x)dx}{\cos(x)\sqrt{\frac{1-4\cos^2(x)}{\cos^2(x)}}}\\ &= \int \frac{\operatorname{sen}(x)dx}{\sqrt{1-4\cos^2(x)}}\end{aligned}$$

Realizando el cambio de variable $u=\cos(x)$, $du=-\operatorname{sen}(x)dx$; tenemos que

$$\int \frac{\tan(x)dx}{\sqrt{\sec^2(x)-4}} = -\int \frac{du}{\sqrt{1-4u^2}}.$$

Realizando el cambio de variable $u=\cos(\theta)/2$, $du=-\operatorname{sen}(\theta)/2d\theta$; obtenemos que

$$-\int \frac{du}{\sqrt{1-4u^2}} = \int \frac{-\operatorname{sen}(\theta)d\theta}{2\sqrt{\operatorname{sen}^2(x)}} = \frac{-1}{2}\theta + C,$$

devolviendo los cambios

$$\int \frac{\tan(x)dx}{\sqrt{\sec^2(x)-4}} = \frac{-1}{2}\arccos(2\cos(x)) + C.$$

*d*) $\int \arctan(x)dx$.
**Solución:** Utilizando integracion por partes: sea $f(x)=\arctan(x)$ y $g'(x)=dx$; asi, $f'(x)=\frac{dx}{1+x^2}dx$, $g(x)=x$ y

$$\int \arctan(x)dx = x\arctan(x) - \int \frac{xdx}{1+x^2}.$$

Realizando el cambio de variable: $u=1+x^2$ y $du=2xdx$. Tenemos que,

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \int \frac{du}{2u} = \frac{1}{2}\ln(u)+C = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

Por ultimo,

$$\int \arctan(x)dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

*e*) $\int x^3\arctan(x)dx$.
**Solución:** Integrando por partes, consideramos como $g'(x)=x^3$ y $f(x)=\arctan(x)dx$ entonces $g(x)=x^4/4$ y $f'(x)=1/(x^2+1)dx$; asi,

$$\begin{aligned}\int x^3\arctan(x)dx &= \tfrac{1}{4}\left(x^4\arctan(x) - \int \tfrac{x^4}{x^2+1}dx\right)\\ &= \tfrac{1}{4}\left(x^4\arctan(x) - \int \left(x^2 - \tfrac{x^2}{x^2+1}\right)dx\right)\\ &= \tfrac{1}{4}\left(x^4\arctan(x) - \int \left(x^2 - \tfrac{x^2+1-1}{x^2+1}\right)dx\right)\\ &= \tfrac{1}{4}\left(x^4\arctan(x) - \int \left(x^2 - \tfrac{x^2+1}{x^2+1} + \tfrac{1}{x^2+1}\right)dx\right)\\ &= \tfrac{1}{4}\left(x^4\arctan(x) - \tfrac{1}{3}x^3 - x + \arctan(x)\right) + C.\end{aligned}$$

*f*) $\int \ln(\ln(x))\frac{1}{x}dx$.
**Solución:** Cambio de variable: $u = \ln(x)$, $du = dx/x$. Así,

$$\int \ln(\ln(x))\frac{1}{x}dx = \int \ln(u)du = u\ln|u| - u + C = \ln|x|\ln|\ln|x|| - \ln|x| + C.$$

*g*) $\int \cos(\ln(x))dx$.
**Solución:** Integración por partes: sea $f(x) = \cos(\ln(x))$ y $g'(x) = dx$, $f'(x) = -\operatorname{sen}(\ln(x))\frac{dx}{x}$ y $g(x) = x$. Así,

$$\int \cos(\ln(x))dx = x\cos(\ln(x)) + \int x\operatorname{sen}(\ln(x))\frac{dx}{x}.$$

Integrando por partes otra vez: sea $f(x) = \operatorname{sen}(\ln(x))$ y $g'(x) = dx$, $f'(x) = \cos(\ln(x))\frac{dx}{x}$ y $g(x) = x$. Obtenemos que,

$$\int \cos(\ln(x))dx = x\cos(\ln(x)) + x\operatorname{sen}(\ln(x)) - \int x\cos(\ln(x))\frac{dx}{x}.$$

Es decir,

$$2\int \cos(\ln(x))dx = x\cos(\ln(x)) + x\operatorname{sen}(\ln(x))$$
$$\int \cos(\ln(x))dx = \frac{1}{2}\left(x\cos(\ln(x)) + x\operatorname{sen}(\ln(x))\right).$$

*h*) $\int (x^3 - 2x)\exp(x)dx$.
**Solución:** Integrando por partes: sea $f(x) = x^3 - 2x$ y $g'(x) = e^x dx$, $f'(x) = (3x^2 - 2)dx$ y $g(x) = e^x$ Así,

$$\begin{aligned}\int (x^3 - 2x)\exp(x)dx &= (x^3 - 2x)e^x - \int (3x^2 - 2)e^x dx \\ &= (x^3 - 2x)e^x + 2e^x - 3\int x^2 e^x dx\end{aligned}$$

Por otro lado, integrando por partes la ultima integral, sea $f(x) = x^2$, $g'(x) = e^x dx$, $f'(x) = 2xdx$ y $g(x) = e^x$. Tenemos que,

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int xe^x dx.$$

Integrando por partes otra vez, sea $f(x) = x$, $g'(x) = e^x dx$, $f'(x) = dx$ y $g(x) = e^x$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\left(xe^x - \int e^x dx\right) = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x.$$

Así,

$$\int (x^3 - 2x)\exp(x)dx = (x^3 - 2x)\exp(x) + 2e^x - 3\left(x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x\right).$$

*i)* $\int \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}dx.$
**Solución:**

$$\int \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}dx = \int \frac{\operatorname{senh}(2x)}{\cosh(2x)}dx = \frac{1}{2}\ln(\cosh(2x)) + C.$$

*j)* $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{4-e^{6x}}}dx.$
**Solución:** Realizando el cambio de variable $u = e^{3x}$, $du = 3e^{3x}dx$; se tiene que

$$\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{4-e^{6x}}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}}$$
$$= \frac{1}{3}\operatorname{arc\,sen}(u/2) + C = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,sen}(e^{3x}/2) + C.$$

4. Sean $A = \int \exp(sx)\cos(tx)dx$ y $B = \int \exp(sx)\operatorname{sen}(tx)dx$. Demuestre que $sB + tA = \exp(sx)\operatorname{sen}(tx) + C$ (sugerencia: halle $sB$ utilizando integración por partes).
**Solución:**

$$sB = \int \exp(sx)\operatorname{sen}(tx)dx$$

Integrando por partes: sea $f(x) = \operatorname{sen}(tx)$ y $g'(x) = se^{sx}dx$, $f'(x) = t\cos(tx)dx$ y $g(x) = e^{sx}$. Así,

$$sB = \int \exp(sx)\operatorname{sen}(tx)dx = e^{sx}\operatorname{sen}(tx) - t\int \exp(sx)\cos(tx)dx = e^{sx}\operatorname{sen}(tx) - tA.$$

Es decir, $sB + tA = e^{sx}\operatorname{sen}(tx)$.

5. Demuestre que $\int \cos^{\alpha}(\beta x)dx = \frac{\cos^{\alpha-1}(\beta x)\operatorname{sen}(\beta x)}{\alpha\beta} + \frac{\alpha-1}{\alpha}\int \cos^{\alpha-2}(\beta x)dx$. Luego, halle $\int \cos^6(2x)dx$.
**Solución:** Integrando por partes: sea $f(x) = \cos^{\alpha-1}(\beta x)$, $g'(x) = \cos(\beta x)dx$, $f'(x) = -(\alpha - 1)\cos^{\alpha-2}(\beta x)\operatorname{sen}(\beta x)\beta dx$ y $g(x) = \frac{1}{\beta}\operatorname{sen}(\beta x)$. Asi,

$$\int \cos^{\alpha}(\beta x)dx = \frac{1}{\beta}\cos^{\alpha-1}(\beta x)\operatorname{sen}(\beta x) + (\alpha-1)\int \cos^{\alpha-2}(\beta x)\operatorname{sen}^2(\beta x)dx.$$

Dado que $\operatorname{sen}^2(\beta x) = 1 - \cos^2(\beta x)$, se tiene que

$$\int \cos^{\alpha}(\beta x)dx = \frac{1}{\beta}\cos^{\alpha-1}(\beta x)\operatorname{sen}(\beta x) + (\alpha-1)\int \cos^{\alpha-2}(\beta x)(\beta x)dx - (\alpha-1)\int \cos^{\alpha}(\beta x)dx.$$

Es decir,

$$\alpha\int \cos^{\alpha}(\beta x)dx = \frac{1}{\beta}\cos^{\alpha-1}(\beta x)\operatorname{sen}(\beta x) + (\alpha-1)\int \cos^{\alpha-2}(\beta x)(\beta x)dx$$
$$\int \cos^{\alpha}(\beta x)dx = \frac{1}{\alpha\beta}\cos^{\alpha-1}(\beta x)\operatorname{sen}(\beta x) + \frac{(\alpha-1)}{\alpha}\int \cos^{\alpha-2}(\beta x)(\beta x)dx.$$

Luego, $\int \cos^6(2x)dx = \frac{1}{12}\operatorname{sen}(2x)\cos^5(2x) + \frac{5}{6}\int \cos^4(2x)dx$. Aplicando de nuevo la formula anterior, tenemos que

$$\int \cos^6(2x)dx = \frac{1}{12}\operatorname{sen}(2x)\cos^5(2x) + \frac{5}{6}\left(\frac{1}{8}\operatorname{sen}(2x)\cos^3(2x) + \frac{3}{4}\int \cos^2(2x)dx\right)$$

Entonces,

$$\int \cos^6(2x)dx = \frac{1}{12}\operatorname{sen}(2x)\cos^5(2x) + \frac{5}{6}\left(\frac{1}{8}\operatorname{sen}(2x)\cos^3(2x) + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{\operatorname{sen}(4x)}{4}\right)\right)\right) + C.$$